Title	ハミルトニアン振動子系における変調不安定解の相空間構造(複雑な多谷ポテンシャルエネルギー面上で生起する動力学的諸問題-力学的決定性と統計性の中間領域を探る(第2回)-,研究会報告)
Author(s)	後藤, 振一郎; 野崎, 一洋; 山田, 裕康
Citation	物性研究 (2002), 78(4): 442-443
Issue Date	2002-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97257
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ハミルトニアン振動子系における変調不安定解の相空間構造

名古屋大学 理学部 物理学教室 R研　後藤 振一郎[1], 野崎 一洋, 山田 裕康.

1 はじめに

ハミルトン力学系はそれ自身に興味が注がれているだけでなく, 化学反応モデル, プラズマ物理などに応用されるため重要である. 高自由度の力学系はそのような系で頻繁に現われるが, 高自由度系は必然的に高次元の相空間を持つため幾何学的直観による相空間構造の理解が困難である. また, それゆえに研究が進んでいない. 従って, 高自由度のハミルトン系の研究はその進展が望まれている. 更にそこで用いられる方法論の開発も未発達である.

今回は高自由度のハミルトン系の基本的な相空間である, 全次元楕円型不動点まわりの構造について報告する. 全次元楕円型不動点でも変調不安定性, 即ち空間的に一様な解 (以後単に "一様解" と呼ぶ.) が不安定化した解 [WH86] などの存在により相空間は複雑になり得る [CEMS96] [MS92]. 変調不安定解は, 力学系の言葉で言えば一様解周りの不安定多様体上の軌道とみなす事ができる. 今回は弱非線形シンプレクティックマップが数素子結合した系を例に, くりこみ群の方法と呼ばれる摂動法 [GMN99][GN01] の拡張版を開発し, それを用いて変調不安定解の相空間構造を調べたので報告する [GNY01].

2 研究の概略

今回の報告では問題を具体的にするため, 以下のような線形結合した弱非線形シンプレクティックマップを用意し[2], 解析を行なった.

$$
\begin{aligned}
x_j^{n+1} &= x_j^n + \tau p_j^{n+1}, &(1)\\
p_j^{n+1} &= p_j^n + \tau\Big[-\Omega^2 x_j^n + \varepsilon\Big\{\nu(x_{j+1}^n - 2x_j^n + x_{j-1}^n) - \alpha(x_j^n)^3\Big\}\Big], &(2)
\end{aligned}
$$

ここで (x_j^n, p_j^n) はサイト $j = 1, 2, .., N$ ($N \geq 3$ は自由度), 時間 $n (\in Z)$ における正準共役な力学変数で実数をとるものとする. このマップ $(x_j^n, p_j^n) \mapsto (x_j^{n+1}, p_j^{n+1})$ は当然 $\sum_j dx_j^{n+1} \wedge dp_j^{n+1} = \sum_j dx_j^n \wedge dp_j^n$, を満たしている. また周期境界条件 $(x_{N+1}^n = x_1^n, p_{N+1}^n = p_1^n)$ が成立しているものとする. $\tau, \Omega, \nu, \alpha$ は $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ の量のパラメーターでそれぞれ時間差分間隔, 各素子の固有振動数, 素子間の結合定数, 非線形項の係数を表す. ε は摂動パラメーターである ($0 < \varepsilon \ll 1$). モデル Eqs. (1), (2) の時間連続極限 $\tau \to 0$ をとると, 以下の非線形振動子が最近接相互作用した系となる.

$$
\frac{dx_j}{dt} = p_j, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\Omega^2 x_j + \varepsilon\Big\{\nu(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - \alpha(x_j)^3\Big\},
$$

[1] E-mail: sgoto@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

[2] なお, Eq. (2) の非線形項に $(x_j^n)^2, (x_j^n)^4$ の項を付け加えても以後の議論で現れるくりこみマップの形は変わらない. それゆえ 3 次の非線形性のみを有するモデルで議論しても, その意味で普遍的な議論をしている事になる.

以後 τ が有限の系を取り扱う．解析を行ない易くするため拡張されたくりこみ群の方法を開発し適用した．結果のみを表すと，

$$(1 - iT\triangle_j^2)A_j^{n+1} = (1 + iT\triangle_j^2)\exp(iQ|A_j^n|^2)A_j^n, \tag{3}$$

ここで $A_j^n, A_j^{n\,*}$ は $\sum_j dA_j^{n+1} \wedge dA_j^{n+1\,*} = \sum_j dA_j^n \wedge dA_j^{n\,*}$ を満たし[3]，$A_j^{n\,*}$ は A_j^n の複素共役を表す．この系では保存量 $\sum_j |A_j^n|^2$ が存在する．また，

$$T := \varepsilon\frac{\tau^2\nu}{4\sin\theta} \in \boldsymbol{R}, \qquad Q := \varepsilon\frac{-\tau^2\alpha}{2\sin\theta} \in \boldsymbol{R}, \qquad \cos\theta := 1 - \Omega^2/2,$$
$$x_j^n \approx A_j^n \exp(-i\theta n) + \text{c.c.}, \qquad \triangle_j^2 A_j^n := A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n.$$

$\sin\theta$ の値は $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ である時のみを考えるものとする．また，c.c. はそれ以前の項の複素共役を表す．この差分方程式系 Eq. (3) は nonlinear Schrödinger Eq. のある数値計算スキームとなっていてる [WH86]．以後このくりこみマップを用いて系を解析する．

ここで得られたくりこみマップは一様解を有し，その線形安定性により一様解に付随する不安定多様体の次元が厳密に予言される[4]．変調不安定性がちょうど生じる一様解の振幅を「臨界振幅」と言うことにすれば，臨界振幅よりわずかに大きい振幅を持つ一様解周りの不安定多様体は homoclinic 的 である事を見出し，更に一様解の振幅を大きくするとそれに付随する不安定多様体の振舞いは極めて複雑になる事が数値的に確認された．

今回は特に，その homoclinic 的な不安定多様体がわずかにランダムになった相空間を調べた．そこでは振幅 $|A_j^n|$ が大きい自由度が時間的に入れ替わるというタイプの乱雑さが存在するが，その入れ換えを数字列で表現しベルヌーイシフトによるアプローチを試みた．我々はこの解析を３，４サイトモデルで行なったが，時間連続系やもっと多いサイト数でも同様であり，あるクラスの格子上の力学の相空間を調べる際には，変調不安定性によるカオスの性質を考慮する事が重要になるであろうと考えている．

参考文献

[CEMS96] A. CALINI, N.M. ERCOLANI, D.W. MCLAUGHLIN, and C.M. SCHOBER, *PHYSICA D* 89 (1996) 227–260.

[GMN99] S. GOTO, Y. MASUTOMI and K. NOZAKI, *Prog. Theor. Phys.* vol. 102, No. 3 (1999) 471–497.

[GN01] S. GOTO and K. NOZAKI, *J. Phys. Soc. Jpn.* vol. 70 (2001) 49–54.

[GNY01] S. GOTO , K. NOZAKI and H. YAMADA, *in preparation* (2001).

[MS92] D.W. MCLAUGHLIN, and C.M. SCHOBER, *PHYSICA D* 57 (1992) 447–465.

[WH86] J. A. C.WEIDEMAN and B. M. HERBST, *SIAM. J. NUMER. ANAL.* vol. 23. No. 3 (1986), 485–507.

[3] この事は自明ではなく，素朴なくりこみマップに対してシンプレクティック性を保存させる必要がある．

[4] nonlinear Schrödinger Eq. $u_t = iq|u|^2u + iu_{xx}, (q \in \boldsymbol{R})$ では $q > 0$ で変調不安定性が生じる．しかし我々の系は空間差分の効果により一様解の振幅に依存して安定性が変化する．